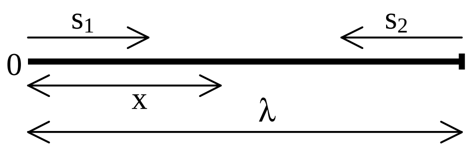
Gleichung für eine stehende Welle

Eine Welle s_1 läuft in positiver x-Richtung. Im Abstand λ (oder auch 2λ, 3λ, ... , $n\lambda$) befindet sich ein Reflektor (z.B. eine feste Wand), an dem die einlaufende Welle reflektiert wird. Die reflektierte Welle hat somit dieselbe Frequenz f (und daher auch dieselbe Wellenlänge λ) und dieselbe Amplitude s_0 wie die einlaufende Welle s_1.



Die Gleichung der einlaufenden Welle s_1 ist:

$$s_1(t;x) = \hat{s} \cdot \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] \qquad \text{Gleichung 1}$$

Sowohl die einlaufende Welle s_1 als auch die reflektierte Welle s_2 müssen auf denselben Punkt auf der x-Achse (Ortskoordinate) bezogen werden. Wenn diese Koordinate für die einlaufende Welle x ist, dann hat für die reflektierte Welle dieser Punkt die Koordinate $\lambda - x$. Die Gleichung der reflektierten Welle lautet daher:

$$s_2(t;x) = \hat{s} \cdot \sin\left[\omega\left(t - \frac{\lambda - x}{c}\right)\right]$$

Diese Gleichung wird umgeformt:

$$s_2(t;x) = \hat{s} \cdot \sin\left[\omega\left(t + \frac{x}{c} - \frac{\lambda}{c}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \qquad s_2(t;x) = \hat{s} \cdot \sin\left[\omega\left(t + \frac{x}{c}\right) - \frac{\omega \cdot \lambda}{c}\right]$$

Der Term $\frac{\omega \cdot \lambda}{c}$ lässt sich vereinfachen:

$$\frac{\omega \cdot \lambda}{c} = \frac{\omega \cdot \lambda}{f \cdot \lambda} = \frac{\omega}{f} = \frac{2\pi}{T} \cdot T = 2\pi$$

Die Gleichung der reflektierten Welle kann also folgendermaßen dargestellt werden:

$$s_2(t;x) = \hat{s} \cdot \sin\left[\omega\left(t + \frac{x}{c}\right) - 2\pi\right]$$

Da die Sinusfunktion die Periode 2π hat, ist die Gleichung für s_2 identisch mit:

$$s_2(t;x) = \hat{s} \cdot \sin\left[\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)\right]$$

Zu berücksichtigen ist jetzt noch der Phasensprung von π am festen Ende:

$$s_2(t;x) = -\hat{s}\cdot\sin\left[\omega\left(t+\frac{x}{c}\right)\right] \qquad \text{Gleichung 2}$$

Die Wellen s_1 und s_2 (mit den Gleichungen 1 bzw. 2) überlagern sich:

$$s(t;x) = s_1(t;x) + s_2(t;x) = \hat{s}\cdot\left[\sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right] - \sin\left[\omega\left(t+\frac{x}{c}\right)\right]\right]$$

Nach Anwendung des Additionstheorems $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$ und unter Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaften $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ sowie $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$:

$$s(t;x) = \hat{s}\cdot\left[\sin(\omega t)\cdot\cos\left(\frac{\omega\cdot x}{c}\right) - \cos(\omega t)\cdot\sin\left(\frac{\omega\cdot x}{c}\right) - \sin(\omega t)\cdot\cos\left(\frac{\omega\cdot x}{c}\right) - \cos(\omega t)\cdot\sin\left(\frac{\omega\cdot x}{c}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad s(t;x) = -2\cdot\hat{s}\cdot\cos(\omega t)\cdot\sin\left(\frac{\omega\cdot x}{c}\right)$$

Wegen $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und $\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\cdot T}{T\cdot\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}$ folgt für die

Gleichung einer stehenden Welle:

$$s(t;x) = -2\cdot\hat{s}\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\cdot x\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad s(t;x) = -2\cdot\hat{s}\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\cdot x\right)\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)}$$

<u>Interpretation dieser Gleichung:</u>

Bei einer laufenden Welle erfährt jedes „Schwingungsteilchen“ irgendwann die größtmögliche Auslenkung $\hat{s}$, da für die Auslenkung die Ortskoordinate x mit der Zeit t verknüpft ist: Sowohl x als auch t stehen im Argument der Sinusfunktion und beide bestimmen daher die Auslenkung s(t;x) (siehe Gleichung 1 oder Gleichung 2 für eine laufende Welle).

Bei einer stehenden Welle dagegen sind die Ortskoordinate und die Zeit voneinander entkoppelt, da sie nicht mehr gemeinsam im Argument derselben Winkelfunktion vorkommen. Der Term $\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$ beschreibt nur das zeitliche Verhalten eines „Schwingungsteilchens“ am Ort x mit der Amplitude $-2\cdot\hat{s}\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\cdot x\right)$. Diese Amplitude ist im Gegensatz zur laufenden Welle zeitunabhängig. Ein Teilchen an einer anderen Stelle x schwingt mit einer anderen, aber ebenfalls festen, d.h. zeitlich unabhängigen Amplitude.

Der Term $\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\cdot x\right)$ stellt eine Welle mit Knotenabständen $\frac{\lambda}{2}$ dar. Es stellen sich stehende Wellen ein, wenn die Länge des schwingungsfähigen Systems gleich ist bzw. der Abstand zwischen Sender und Reflektor gleich ist

$l=\frac{\lambda}{2}$ (Grundschwingung) oder $l=2\cdot\frac{\lambda}{2};\ l=3\cdot\frac{\lambda}{2};\ \ldots\ l=n\cdot\frac{\lambda}{2}$ (Oberschwingungen).

Die Grundschwingung und die Oberschwingungen bilden die Eigenschwingungen des Systems.